23.9.

Minule: graf kvadratické fce

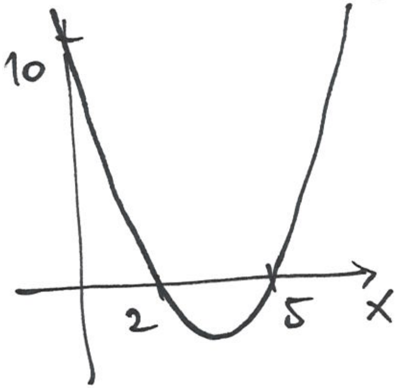
Nyní: <u>kvadratická nerovnice</u>

<u>Př</u>: $f(x) = x^2 - 7x + 10$

Nerovnice: $x^2 - 7x + 10 > 0$

$<, \geq, \leq$

<u>1. způsob</u>: <u>z grafu</u> kvadr. fce



je vidět:

$x \in (2,5) \Rightarrow f(x) < 0$

$x \in \langle 2,5 \rangle \Rightarrow f(x) \leq 0$

$x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$
$\Rightarrow f(x) > 0$

$x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq 0$

<u>2. způsob</u> – pomocí <u>tabulky</u>

potřebujeme rozklad fce f na kořenové činitele:

$$f(x) = (x-2)(x-5)$$

Tabulka:

	$-\infty$	2		5	∞
$(x-2)$	$-$	o	$+$		$+$
$(x-5)$	$-$		$-$	o	$+$
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

Víme: $+ \cdot + = +$
$- \cdot - = +$
$+ \cdot - = -$

Odsud vidíme:
$x \in (2,5) \Rightarrow f(x) \leq 0$
atd.

C) Kubické fce

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

koef. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Hledání kořenů kubické fce

Existuje obecný postup - nepraktický.

Ale pro „hezky zadané fce"

to jde snadno: předpokládáme,

že $f(x)$ má aspoň jeden

celočíselný kořen.

1. krok: tento kořen uhádneme

Př: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

Dosazujeme za x malá

celá čísla:

$x = 0$: $f(0) = -8$ není kořen

$x = 1$: $f(1) = 1 + 3 - 6 - 8 = -10$ není

$x = -1$: $f(-1) = -1 + 3 + 6 - 8 = 0$ OK

Tedy $x_1 = -1$ je kořen.

Máme tudíž i kořenový činitel

$(x+1) \Rightarrow$ bude $f(x) = (x+1) \cdot p(x)$,

kde $p(x)$ je nějaký zatím

neznámý kvadratický polynom.

Platí tedy $p(x) = f(x) : (x+1)$

2. krok: dělíme $f(x) : (x+1)$

viz další strana

$$(x^3+3x^2-6x-8) : (x+1) = \underbrace{x^2+2x-8}_{p(x)}$$

$$\begin{array}{l}
-(x^3+x^2) \\
\hline
\quad 2x^2-6x-8 \\
\quad -(2x^2+2x) \\
\hline
\qquad -8x-8 \\
\qquad -(-8x-8) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

3. krok: najdeme kořeny $p(x)$

$$x^2+2x-8 = (x+4)\cdot(x-2) \quad \text{(Viète)}$$

$\Rightarrow$ kořeny $x_2 = 2,\ x_3 = -4$

$$\Rightarrow K = \{-1;\ 2;\ -4\}$$

Kubická nerovnice: kdy je

$$f(x) = x^3+3x^2-6x-8 > 0 \ (<0, \geq 0, \leq 0)?$$

$$= (x+4)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

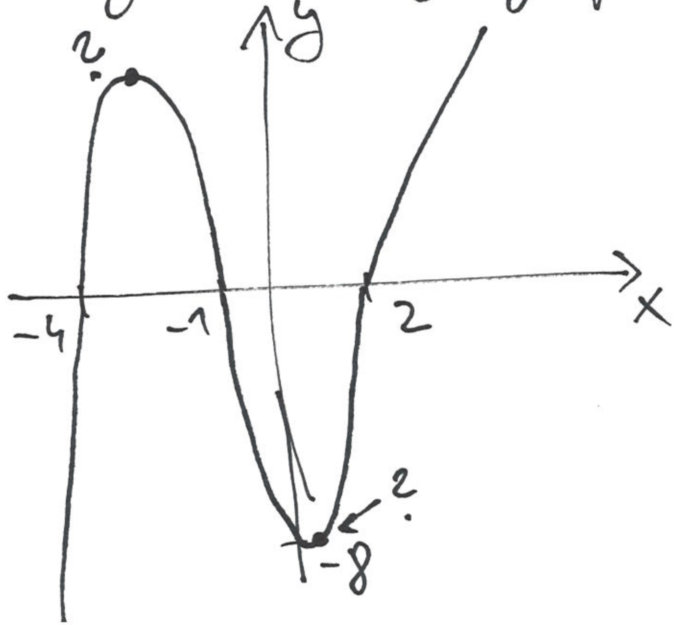
Pomocí tabulky:

	$-\infty$ … -4	-4 … -1	-1 … 2	2 … $+\infty$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\Rightarrow f(x) > 0$ v $(-4,-1) \cup (2,+\infty)$

$f(x) < 0$ v $(-\infty,-4) \cup (-1,2)$

Předběžný (přibližný) graf



D) Racionální lomené fce

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x), q(x) = \text{polynomy}$$

a) rovnice: $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$

platí: $\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$

(vzniklo vynásobením rovnice výrazem $q(x)$)

Pozn.: případy s nenulovou pravou stranou se dají převést na tento případ

b) nerovnice (opět s nulovou pravou stranou)

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \quad (<0,\ \geq 0,\ \leq 0)$$

Postup: čitatele i jmenovatele rozložíme na kořenové činitele, $\forall$ kořeny sestavíme do tabulky.

Př.: $\frac{x^2-2x-15}{x-2} \geq 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, tato ~~~~ hodnota 2 je zároveň jedním z kořenů

Kořeny čitatele: $x^2-2x-15 = (x+3)(x-5) \Rightarrow$ kořeny $-3, 5$.

Tabulka:

	$-\infty$ … -3	-3 … 2	2 … 5	5 … $+\infty$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-5)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\Rightarrow K = \langle -3, 2) \cup \langle 5, +\infty)$

4

(E) Lineární lomené fce

(spec. případ rac. lom. fce)

je to fce tvaru $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

zde umíme nakreslit graf, tímto grafem je hyperbola

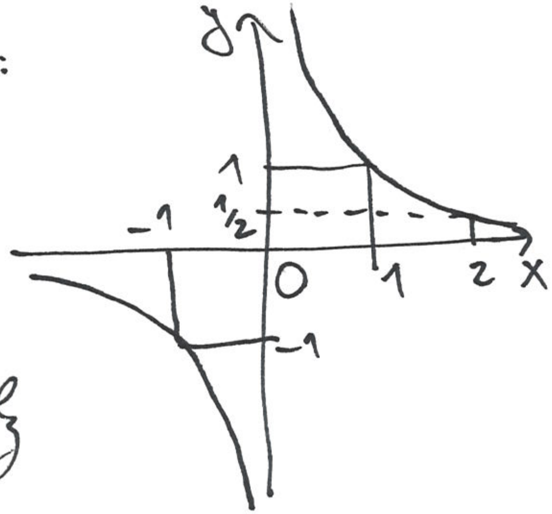
Základní příklad: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(je to lin. lomená fce: $f(x) = \dfrac{0 \cdot x + 1}{1 \cdot x + 0}$, tj. $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$)

Def. obor:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Graf:



Osy x a y = asymptoty hyperboly

Grafem fce $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ je také hyperbola (posunutá, roztažená, překlopená).

Předpokládáme, že $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ (aby to byla nekonstantní fce), a také $c \neq 0$ (aby byla nelineární).

Def: musí být $cx+d \neq 0$

$x \neq -\dfrac{d}{c}$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

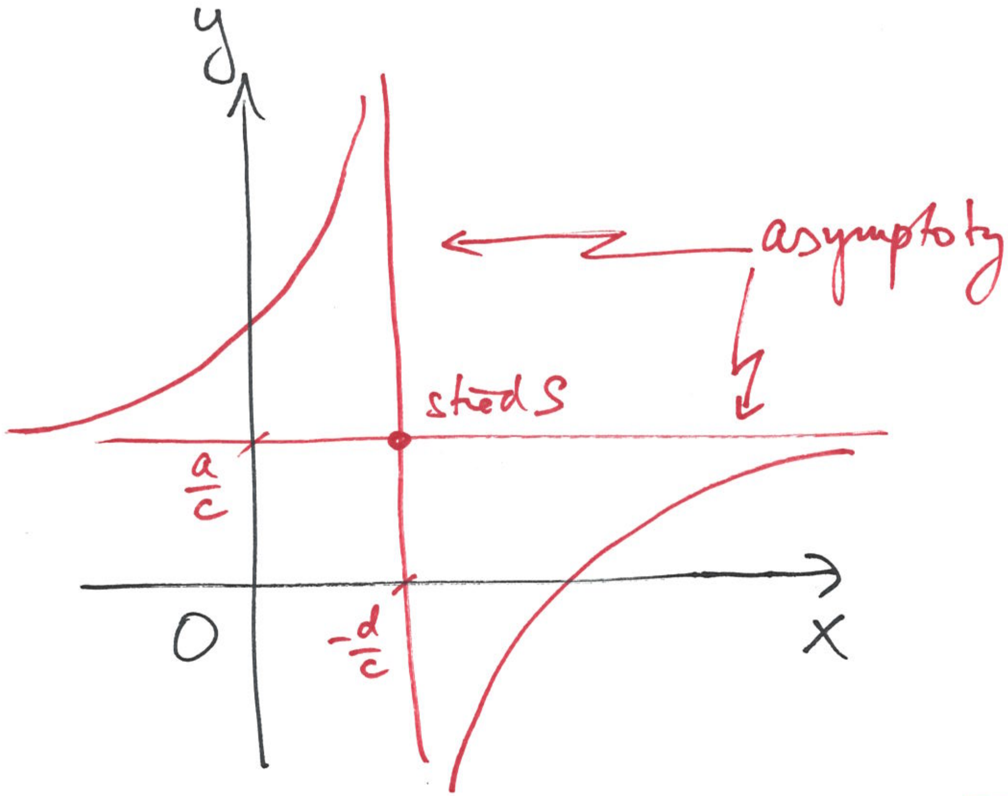
Funkci částečně vydělíme (tj. se zbytkem):

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}$$

svislý posun

roztažení

~~svislý~~ vodorovný posun



Střed $S = \left[-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right]$

vodorovná asymptota: $y = \frac{a}{c}$

svislá ——— " ———: $x = -\frac{d}{c}$

<u>Př</u>: $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, graf = ?

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Částečné dělení:

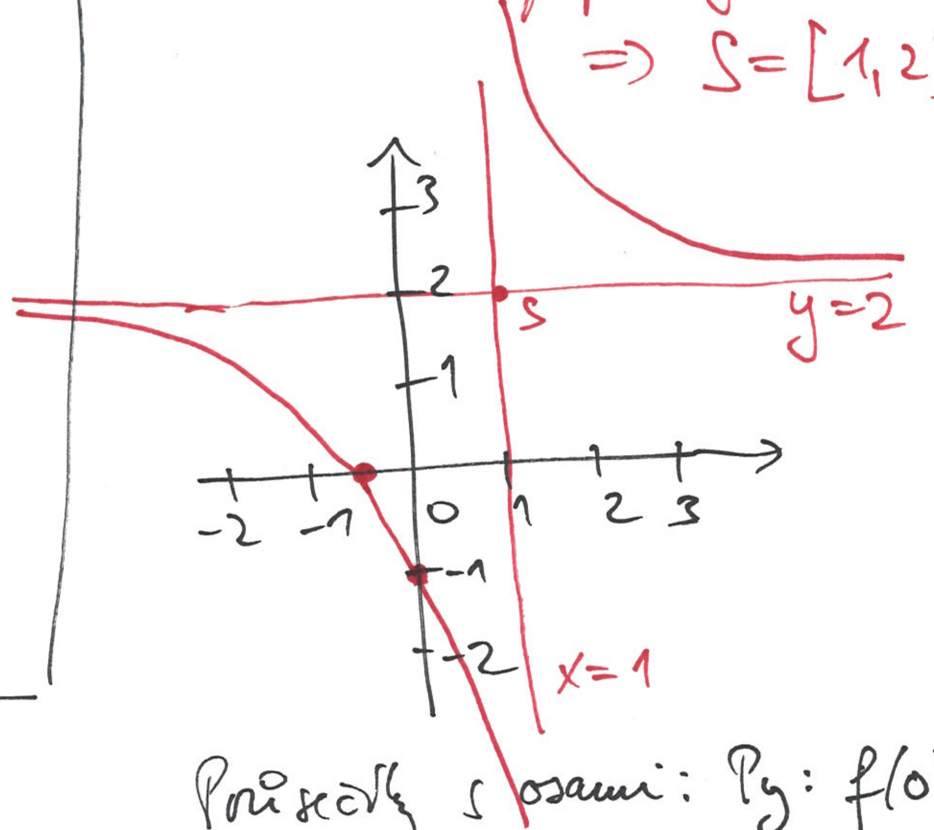
$$\begin{array}{l} (2x+1) : (x-1) = 2 \\ \underline{-(2x-2)} \\ \quad 3 \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$

vodorovná asymptota $y=2$

svislá as. $x=1$

$\Rightarrow S = [1, 2]$



Průsečíky s osami: P_y: $f(0) = \frac{1}{-1} = -1$

P_x: $2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$